

a = 210 mm

90°

b = 297 mm

Mathematik und Politik

Es ist Wahlabend, 18 Uhr. Soeben haben die Wahllokale geschlossen, und die Fernsehsender zählen die Minuten, bis die ersten Hochrechnungen vorliegen. Auch wenn erst ein Bruchteil der Stimmen ausgezählt ist, werden sie mit Spannung erwartet. Denn in der Regel sagen sie den tatsächlichen Wahlausgang bis auf wenige Prozentpunkte genau voraus. Hängt die Regierungsbildung nicht von wenigen Mandaten ab, ist die Wahl um kurz nach 18 Uhr prognostisch entschieden.

Möglich macht das die Mathematik, und zwar durch komplexe statistische Verfahren. Schon vorliegende Ergebnisse aus einzelnen Wahlbezirken werden nach komplizierten mathematischen Schlüsseln auf die Gesamtheit der Wählerschaft hochgerechnet. Mit jeder Hochrechnung kommen weitere Wahlkreise hinzu und im Laufe des Abends nähern sich die Hochrechnungen dem tatsächlichen Ergebnis an.

Und auch das Endergebnis der Wahlen hängt von mathematischen Verfahren ab, nach denen die jeweilige Sitzverteilung berechnet wird. Im Laufe der Zeit haben in Deutschland von unzählig vielen existierenden Verfahren drei Eingang in die Wahlgesetzgebung gefunden: das D'Hondtsche Höchstzahlverfahren, das Hare/Niemeyer-Verfahren und das Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers).

Doch nicht nur im Zusammenhang mit Wahlen zeigt sich die Bedeutung der Mathematik für die Politik. So wird gelegentlich auch die EU-Politik von ihr geprägt. Jahrelang stritten sich die Mitgliedsländer der Europäischen Union darüber, nach welchem Proporz die Stimmverteilung im wichtigsten Entscheidungsgremium der Union, dem Ministerrat, geregelt werden soll. Ein Beispiel ist die Auseinandersetzung um die so genannte Quadratwurzel, einem mathematischen Vorschlag zur Stimmverteilung nach Einwohnerzahl.

Die Beispiele zeigen, wie eng Mathematik und Politik zusammenhängen. Dabei ist Mathematik nicht nur ein technisches Werkzeug, das bei der Auszählung von Stimmen hilft, sondern selbst ein „Demokratiefaktor“, der demokratische Staaten in der ganzen Welt prägt.

Das Hare/Niemeyer-Verfahren

Die Politik kennt zwei Grundtypen von Wahlsystemen: Mehrheits- bzw. Verhältniswahl. Sie unterscheiden sich in der Art und Weise, wie die Stimmen der Wählerinnen und Wähler in Mandate verwandelt werden. Bei der Mehrheitswahl stellen sich Abgeordnete in einer persönlichen Wahl direkt zur Abstimmung. Bei der Verhältniswahl wird aus den Stimmenanteilen der Parteien eine verhältnismäßige Sitzzahl im Parlament abgeleitet.

Die Besonderheit des bundesdeutschen Wahlsystems besteht in einer Mischung aus beiden Systemen. Jeder Wähler hat zwei Stimmen, eine so genannte Erststimme, mit der er sich für einen Kandidaten aus seinem Wahlkreis entscheidet, und eine Zweitstimme, mit der er sich für eine Partei entscheidet.

Der Anteil an den (mindestens) 598 Sitzen des Bundestages, die eine Partei zugesprochen bekommt, richtet sich nach ihrem Anteil an den Zweitstimmen. Die genaue Berechnung erfolgt seit 1987 über das Hare/Niemeyer-Verfahren, benannt nach dem englischen Juristen Thomas Hare und dem deutschen Mathematiker Horst Niemeyer.

Bevor das Verfahren angewendet wird, zieht man zunächst die Anzahl der Direktmandate ab, die von unabhängigen Kandidaten und von Kandidaten, deren Partei an der 5%-Prozent-Hürde gescheitert ist, gewonnen wurden. Entsprechend wird die Anzahl der Zweitstimmen nach unten korrigiert. Dann kommt das Hare/Niemeyer-Verfahren zur Anwendung. Zuerst berechnet man für jede Partei einen Sitzanspruch, indem man die noch übrigen Sitze mit den Zweitstimmen der Partei multipliziert und anschließend durch die Gesamtzahl aller Zweitstimmen der erfolgreichen Parteien teilt.

$$\frac{\text{Anzahl Sitze} \times \text{Anzahl Zweitstimmen}}{\text{Anzahl aller Zweitstimmen}} = \text{Sitzanspruch}$$

Der Sitzanspruch ist im Allgemeinen keine ganze Zahl, sondern eine gebrochene. Sie wird aufgeteilt in den ganzzahligen Anteil und den Nachkommanteil. Die Sitzzuteilung erfolgt nun in zwei Schritten. Im ersten Schritt bekommt jede Partei entsprechend dem ganzzahligen Anteil ihrer Parteiquote Sitze zugewiesen. Im zweiten Schritt werden die danach noch verbleibenden Sitze anhand der Nachkommastellen vergeben. Den ersten freien Sitz bekommt die Partei mit dem größten Nachkommanteil, den zweiten freien Sitz die Partei mit dem zweitgrößten Nachkommanteil usw. bis alle Sitze vergeben sind. Sollten einmal gleich große Nachkommanteile auftreten, entscheidet das Los.

Ein Beispiel: Bei der Bundestagswahl 2005 gab es keine unabhängigen Direktkandidaten und auch keine Direktkandidaten von Parteien, die an der 5%-Hürde gescheitert sind. Die zu vergebende Sitzzahl blieb also bei 598 Sitzen. In der folgenden Tabelle finden sich die Anteile der Zweitstimmen und die Anzahl der errungenen Sitze.

Partei	Zweitstimmen	Hauptzuteilung	Quotientenreste	Restzuteilung	Sitze
SPD	16 194 665	213	,170338		213
CDU	13 136 740	172	,918878	+1	173
FDP	4 648 144	61	,183509		61
Linke	4 118 194	54	,207778		54
Grüne	3 838 329	50	,523916	+1	51
CSU	3 494 309	45	,995581	+1	46
Gesamt	45 430 381	595		+3	598

Anzahl Zweitstimmen und errungene Sitze Bundestagswahl 2005.

Rechenbeispiel SPD: $(16\,194\,665 \times 598) / 45\,430\,381 = 213,17$

Welche Personen für die Parteien auf die gewonnenen Mandate rücken, wird auf zwei Wegen ermittelt. Die Gewinner der 299 Wahlkreise besetzen die erste Hälfte der Sitze im Bundestag. Die zweite Hälfte wird mit den Kandidaten der Landeslisten besetzt, die eine Partei im Vorfeld der Wahlen aufgestellt hat. Auch hier kommt wieder das Hare/Niemeyer-Verfahren zur Anwendung, nur dass es diesmal für jedes Bundesland separat angewendet wird. Es wird die Anzahl der Sitze, die eine Partei im Bundestag errungen hat, mit der Anzahl ihrer im betreffenden Bundesland gewonnenen Zweitstimmen multipliziert und durch die Zahl der bundesweit gewonnenen Zweitstimmen geteilt. Das abgerundete Ergebnis (zusammen mit einem etwaigen Restsitz) ergibt die Anzahl der Kandidaten, die von einer Landesliste in den Bundestag einziehen - und zwar von Listenplatz 1 abwärts.

Das D'Hondtsche Höchstzahlverfahren

Das Hare/Niemeyer-Verfahren ist eines von mehreren weltweit verwendeten mathematischen Verfahren, mit denen die Sitzverteilung in Parlamenten errechnet werden kann. Zwischen ihnen gibt es wesentliche Differenzen. Unterschiedliche mathematische Zuteilungsverfahren können bei gleichem Ergebnis zu unterschiedlichen Sitzverteilungen im Parlament führen. Bei knappen Wahlausgängen kann also das angewandte Verfahren mit darüber entscheiden, wer die Regierung stellt.

Bis 1987 wurde die Sitzverteilung des Bundestages nach dem Verfahren von D'Hondt ermittelt. Dieses Verfahren bevorzugt allerdings größere Parteien etwas zu Ungunsten kleinerer. Man entschied sich deswegen, es durch das



$a = 210 \text{ mm}$

90°

Hare/Niemeyer-Verfahren zu ersetzen. Im Dezember 2007 hat die derzeit regierende große Koalition einen Gesetzentwurf eingebracht, um zum Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) zu wechseln.

Nach Auffassung von Mathematikern wie Professor Pukelsheim, der diverse Parlamente und Regierungen in Fragen des Wahlsystems berät, würde das so genannte „Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers)“ die Idee der Wahlgleichheit bestmöglich erfüllen. Es funktioniert nach dem einfachen Prinzip „Teile und Runde“. Alle Zweitstimmen werden durch einen gemeinsamen Divisor geteilt, und das Ergebnis anschließend zur nächsten ganzen Zahl gerundet, d.h. Bruchteile kleiner als 0,5 werden abgerundet, Reste größer als 0,5 werden aufgerundet. Bisher wird dieses Verfahren allerdings nur in Hamburg und Bremen, sowie bei der Besetzung der Ausschüsse des Bundestages angewendet.

Die Quadratwurzel

Auch der Streit der Mitgliedsstaaten der Europäischen Union über einen neuen EU-Vertrag war im Kern von mathematischen Fragen berührt. Größter Konfliktpunkt war über Jahre die Frage, wer welches Gewicht im wichtigsten Abstimmungsorgan - dem Ministerrat - haben soll. Die großen Staaten wollten sich mit einem neuen Vertrag mehr Einfluss sichern, weil sie sich durch die derzeit geltende Stimmenverteilung gegenüber den kleineren Mitgliedsstaaten benachteiligt fühlen.

Lange hatte es so ausgesehen, als würden die Mitglieder der Europäischen Union an dieser Frage nicht zueinander finden können. Die kleineren und mittleren Länder wollten verhindern, dass sich das Machtgewicht zu ihren Ungunsten verschiebt, und lehnten die Reformvorschläge der großen Länder ab. Stattdessen wurde die viel diskutierte Quadratwurzel-Berechnung für die künftige Stimmenverteilung im Rat vorgeschlagen. Sie geht auf den britischen Mathematiker Lionel Penrose zurück und wurde unter anderem von Professor Werner Kirsch von der Ruhr-Uni Bochum weiterentwickelt. Viele Mathematiker halten sie aus statistischen Gründen für das gerechteste Verfahren. Bei diesem zieht man aus der Bevölkerungszahl jedes EU-Mitgliedsstaates die Quadratwurzel, etwa neun aus gerundet 81 Millionen Deutschen. Portugal, das mit 10,6 Millionen Bürgern etwa ein Achtel der deutschen Bevölkerung ausmacht, hätte ein Drittel der Stimmenzahl, die Deutschland erhielte. Auf dem Gipfel in Brüssel im Juni 2007 setzte sich die Quadratwurzel jedoch nicht durch. Stattdessen einigte man sich auf das Verfahren der so genannten doppelten Mehrheit. Eine Mehrheit ist dann erreicht, wenn mindestens 55 Prozent der Staaten zustimmen, die mindestens 65 Prozent der EU-Bevölkerung vertreten.

$b = 297 \text{ mm}$

a = 210 mm

90°

b = 297 mm

Zahlen und Fakten

Bundestagswahl

299 Wahlkreise hat Deutschland momentan

613 Sitze hat der Deutsche Bundestag in der gegenwärtigen 16. Wahlperiode

15 Überhangmandate hat der Bundestag in der 16. Wahlperiode - neun für die SPD und sechs für CDU/CSU

61,9 Millionen Wahlberechtigte wurden zur Bundestagswahl 2005 zur Wahl aufgerufen, so viele wie nie zuvor.

77,7 Prozent von ihnen gaben ihre Stimme ab.

Landtagswahlen 2008

27.01.2008 Niedersachsen (D'Hondt-Verfahren)

27.01.2008 Hessen (Hare/Niemeyer-Verfahren)

24.02.2008 Hamburg (Divisor-Methode mit Standardrundung)

28.09.2008 Bayern (Hare/Niemeyer-Verfahren)

Ansprechpartner:

Professor Dr. Friedrich Pukelsheim, Universität Augsburg
Lehrstuhl für Stochastik und ihre Anwendungen

Professor Pukelsheim ist ein international renommierter Experte für Sitzzuteilungsverfahren. Er berät diverse Parlamente und Regierungen und hat für den Kanton Zürich ein eigenes Wahlverfahren entwickelt, den so genannten „doppelten Pukelsheim“.

Kontakt:

Telefon: 0821-598-2206

E-Mail: Pukelsheim@Math.Uni-Augsburg.de

Homepage: www.uni-augsburg.de/pukelsheim (hier auch weiterführende Publikationen zum Thema)

Wissenschaftsjahr 2008

Mathematik
Alles, was zählt



$a = 210 \text{ mm}$

90°

$b = 297 \text{ mm}$

Professor Dr. Werner Kirsch, Ruhr-Universität Bochum
Arbeitsgruppe Mathematische Physik

Professor Kirsch gehört zu den Erfindern der so genannten Quadratwurzelberechnung. Zusammen mit 46 anderen Wissenschaftlern verfasste er 2004 einen offenen Brief an die Regierungen aller Länder, der für die Einführung der Quadratwurzel wirbt.

Kontakt:
Ruhr-Universität Bochum
Telefon: 0234 32-23308
E-Mail: werner.kirsch@ruhr-uni-bochum.de
Homepage: www.ruhr-uni-bochum.de/mathphys/werner.htm

Nützliche Links:

www.bundestag.de
Offizielle Website des Deutschen Bundestages

www.wahlrecht.de
Unabhängiges Internet-Angebot rund um die Themen Wahlen, Wahlrecht, Wahlverfahren und Wahlprognosen.

www.bpb.de
Offizielle Website der Bundeszentrale für politische Bildung

www.bundeswahlleiter.de
Website der zentralen Wahlbehörde des Bundes

Mehr erfahren Sie auch unter: www.jahr-der-mathematik.de.



$a = 210 \text{ mm}$

90°

Der Abdruck ist honorarfrei. Ein Belegexemplar wird erbeten.
Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an:

Redaktionsbüro Jahr der Mathematik

Christina Vardakis
Quartier 207
Friedrichstraße 78
10117 Berlin
Tel.: (030) 700 186 – 475
Fax: (030) 700 186 – 810
vardakis@jahr-der-mathematik.de

Christian Plaep
Quartier 207
Friedrichstraße 78
10117 Berlin
Tel.: (030) 700 186 – 774
Fax: (030) 700 186 – 810
plaep@jahr-der-mathematik.de

$b = 297 \text{ mm}$